

Cvīcēnia
2
UDŠ

Ćwiczenia

des. funph. umiara de | rajnik / udds

- A: <90, 100>
- B: <80, 90>
- C: <65, 80>
- D: <55, 65>
- E: <50, 55>

pisanka 3.M. 2016
D.U. (2 D.U. po 2 przykładach) 10 b
zawieszona pisanka 70 b
istnieje słuska je dobrociada

Ćwiczenie 1.

U2

A	B	A ∧ B	A ∨ B	A ⇒ B	A ⇔ B
0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1

$$a) (A \wedge B) \Rightarrow A$$

A	B	
0	0	1
1	0	1
0	1	1
1	1	1

je to tautologia

$$d) [A \wedge (B \vee C)] \Leftrightarrow [(A \wedge B) \vee (A \wedge C)]$$

A	B	C	B ∨ C	A ∧ B	A ∧ C	A ∧ (B ∨ C)	(A ∧ B) ∨ (A ∧ C)
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

je to tautologia

$$c) [(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)] \Rightarrow (A \Rightarrow C)$$

je to tautologia

$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$

toto sa da uvyodit z tabulky

$$\neg(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow \neg[(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)] \Leftrightarrow \neg(A \Rightarrow B) \vee \neg(B \Rightarrow A) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A)$$

$$a) \neg(A \wedge (B \Rightarrow C)) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg(B \Rightarrow C)) \Leftrightarrow (\neg A \wedge (B \wedge \neg C))$$

$$b) \neg[(A \Rightarrow B) \vee (\neg C \Rightarrow A)] \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee \neg(\neg C \Rightarrow A) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee ((\neg C \Rightarrow A) \wedge (\neg C \Rightarrow A)) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge [(\neg C \wedge A) \vee (A \wedge C)]$$

$$d) \neg[A \wedge ((B \wedge A) \vee (C \wedge B))] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \neg A \wedge \neg[(B \wedge A) \vee (C \wedge B)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \neg A \wedge [\neg(B \wedge A) \wedge \neg(C \wedge B)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \neg A \wedge [(\neg B \vee \neg A) \wedge (\neg C \vee \neg B)] \Leftrightarrow$$

INDEMPOTENTNOST

$$\hookrightarrow (p \wedge p) \Leftrightarrow p$$

$$\hookrightarrow (p \vee p) \Leftrightarrow p$$

KOMUTATIVNOST

$$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$$

aj pre or

ASOCIATIVNOST

$$(p \wedge (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \wedge r)$$

aj pre or

DISTRIBUTIVNOST

$$(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

DVOJITA

$$\neg \neg p \Leftrightarrow p$$

$$\bullet (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B) / \neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$$

$$U1) a) [A \vee (B \vee A)] \wedge (\neg A \vee B) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (\neg A \vee B) \Leftrightarrow A \Leftrightarrow B$$

$$\Leftrightarrow [(A \vee A) \vee B] \wedge (\neg A \vee B) \Leftrightarrow (B \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B)$$

$$b) ((B \wedge A) \vee (A \wedge B)) \Rightarrow (C \vee A) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (A \wedge B \vee B) \Rightarrow (C \vee A) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A \Rightarrow (C \vee A) \Leftrightarrow \neg A \vee (A \vee C) \Leftrightarrow (A \vee A) \vee C$$

$$\Leftrightarrow A \vee (C \vee A) \Leftrightarrow$$

nie distributivnost ale komut. asoc.

$$\Leftrightarrow (A \vee C) \vee (A \vee A) \Leftrightarrow (A \vee C) \vee C \Leftrightarrow A \vee C \Leftrightarrow 1$$

U2

Ú5 Vyjádřit $\Rightarrow$ a $\Leftrightarrow$ pomocí $\neg, \wedge, \vee$.

$$\begin{aligned} (A \Leftrightarrow B) &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \Leftrightarrow \neg(A \Rightarrow B) \vee \neg(B \Rightarrow A) \rightarrow \neg(A \wedge B) \vee (B \wedge \neg A) \\ &\Leftrightarrow \underline{(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)} \end{aligned}$$

Ú6 Vyjádřit $\vee$ pomocí $\neg$ a $\wedge$.

$$\begin{aligned} (A \vee B) &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \neg(\neg(A \vee B)) \\ &\Leftrightarrow \underline{\neg(A \wedge \neg B)} \end{aligned}$$

Ú7 (not and) negácia ábra

A	B	$A \uparrow B$	$A \wedge B$	$\neg A$	$A \uparrow \neg A$	$\neg(A \wedge B)$	$A \wedge B$
0	1	1	0	1	1	0	
1	1	0	1	0	0	1	
0	0	1	0	1	1	0	
1	0	1	0	0	0	0	

Ú8 D.Ú.

$$\begin{aligned} \neg A &\Leftrightarrow A \uparrow A \\ \neg(A \uparrow B) &\Leftrightarrow A \wedge B \end{aligned}$$

$$(A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow B) \Leftrightarrow A \wedge B$$

↓ (nor)
⊕ (xor)

30.9.2021

$(\forall x \in M) p(x) \rightarrow$ toto je striktný zápis z analýzou
 $(\forall x)(x \in M) \Rightarrow p(x) \rightarrow$ toto je formálny zápis

$$\begin{aligned} (\exists x \in M) p(x) \\ (\exists x)(x \in M) \wedge p(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg[(\forall x) p(x)] &\Leftrightarrow (\exists x) \neg p(x) \\ \neg[(\exists x) p(x)] &\Leftrightarrow (\forall x) \neg p(x) \end{aligned}$$

① $p(x); x \in \mathbb{Z}$
 $(\forall x)(x \in \mathbb{N}) \Rightarrow p(x)$
 $(\exists x)(x \in \mathbb{N}) \wedge p(x)$

② $(\forall x) \Rightarrow a(x)$
 $(\exists x) \Rightarrow a(x)$

a) $|M|=1$ tak tieto sú ekvivalentné
 $\hookrightarrow$ naše univerzuma má 1 prvok
 $\hookrightarrow$ všetok množiny

b) $|M|=0 \rightarrow$ V - vždy platí
 $\hookrightarrow$ Z - nikdy neplatí

③ negujeme $M = \mathbb{Z}$

a) $(\exists x)(x \in \mathbb{N})$ b) $(\exists x)(x \in \mathbb{N} \wedge x > 5)$ c) $(\forall x)(x^2 > 0)$
 $(\forall x)(x \notin \mathbb{N})$ $(\forall x)(x \notin \mathbb{N} \vee x \leq 5)$ $(\exists x)(x^2 \leq 0)$

d) $(\exists x)(x \bmod 2 = 0 \vee x \bmod 2 = 1)$
 $(\forall x)(x \bmod 2 \neq 0 \wedge x \bmod 2 \neq 1)$

f) $(\exists x)(x \bmod 2 = 0 \wedge x \bmod 2 = 1)$
 $(\forall x)(x \bmod 2 \neq 0 \vee x \bmod 2 \neq 1)$

g) $(\exists x)(x=5) \Rightarrow (\forall y)(y=5)$ - neplatí
 $(\exists x)(x=5) \wedge (\exists y)(y=5)$
 $\neg$ $(\exists x)(x=5) \Rightarrow (\forall x)(x=5)$ - neplatí
 $(\exists x)(x=5) \wedge (\exists x)(x \neq 5)$

④ a) $e(a): (\exists k)(k \in \mathbb{Z}) \wedge (a=2k)$
b) $d|a: (\exists d)(k \in \mathbb{Z}) \wedge (a=d \cdot k)$
c) $a \bmod d = z:$
 $(\exists u \in \mathbb{N}) \wedge (z \in \mathbb{N})$
 $a / (d \cdot u) = z \cdot (d \cdot u) \wedge (a, z \in \mathbb{N}) \wedge (d \in \mathbb{N}) \wedge ((d \cdot u) \cdot z = a) \wedge (z < d)$
d) $P(x): x$ je prvočíslo
 $P(x): (\exists u)(u \in \{1, 2, 3\}) \wedge k \mid x \wedge (\forall w)(w \notin \{1, 2, 3\}) \Rightarrow w \nmid x$

5) a) $(\forall x) [101x \Rightarrow (21x)]$
 b) $(\forall x, y, z) (x+y=z) \wedge 3 \mid (x+y-z)$

* g) provokaci je nekonečne velá D.U.
 $(\forall n) (n \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\exists x) (p(x) \wedge x > n) \wedge (x \in \mathbb{N})$
 ↓
 provokaci

7.10.2021

1) a) $\sqrt{60} > \sqrt{15} + \sqrt{15}$
 $2\sqrt{15} > \sqrt{15} + \sqrt{15}$
 $4 \cdot 15 > 15 + 2\sqrt{15} + 15$
 $60 > 30 + 2\sqrt{15}$
 $15 > \sqrt{15}$
 $15^2 > 15 \cdot 15$
 $225 > 225$ ✓
 DOKAZ ZÁVĚRY TV

b) $\sqrt{9-16} < \sqrt{9+16} - 1$ /2
 $9-16 < 9+16 - 2\sqrt{9 \cdot 16} + 1$
 $2\sqrt{9 \cdot 16} < 2\sqrt{16} + 1$ /:2
 $\sqrt{9 \cdot 16} < \sqrt{16} + \frac{1}{2}$ /2
 $9 \cdot 16 < 16 + \frac{1}{4}$
 $\frac{1}{2}\sqrt{16} < \frac{5}{4}$ /:2
 $\sqrt{16} < \frac{5}{2}$ /2
 $16 < \frac{25}{4}$ ✗
 $\frac{40}{4} < \frac{25}{4}$
 prátat!

2) TAUTOLOGIA?
 $a) [(A \Rightarrow B) \wedge (C \vee D) \wedge ((\neg A \wedge C) \Rightarrow E)] \Rightarrow [B \Rightarrow (E \vee D)]$
 # "důkaz sporu" - v žádném případě tedy neplatí
 ↓
 TAUTOLOGIA (našle sam spor)
 b) $[(\neg A \Rightarrow B) \vee (C \wedge D) \vee (E \wedge \neg C \wedge A)] \Rightarrow (B \wedge C) \Rightarrow A$
 DOKAZAT DOKA

3) a) $(\forall n \in \mathbb{N}) (\exists k \in \mathbb{N}) (7 \mid 47n \Rightarrow 7 \mid n) \Rightarrow \text{PLATÍ}$
 $(\forall n \in \mathbb{N}) (\exists k \in \mathbb{N}) (7 \mid 47n \wedge 7 \nmid n)$ spor
 $7 \mid n \Rightarrow 7 \mid 47n$ domněnka
 $7 \mid 47n \wedge 7 \nmid n$
 $n = 7k$
 $7 \mid 47 \cdot 7k$
 $7 \nmid 7(47k)$ ✗

b) $(\forall a, b \in \mathbb{R}) (\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}) \Rightarrow \text{PLATÍ}$
 spor: $\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab}$
 $a+b < 2\sqrt{ab}$ /2
 $a^2 + 2ab + b^2 < 4ab$
 $a^2 - 2ab + b^2 < 0$
 $(a-b)^2 < 0$
 ↓
 blbě! Ubo $x^2 \geq 0$!

4) TAUTOLOGIA? ✓ - doka
 ✗ - kontrapříklad

a) $(\forall x) a(x) \Rightarrow (\exists x) a(x)$ rozumně

b) $(\exists x) a(x) \Rightarrow (\forall x) a(x)$
 nejake číslo je tak každé je
 provokaci
 neplatí
 ↪ we je tautologie

kontra: $M = \{1, 2, 3\}$
 $a(1) \Leftrightarrow 0$
 $a(2) \Leftrightarrow 1$

CHYBA!
 $M = \emptyset$
 $1 \Rightarrow 0$

c) $(\forall x) [a(x) \Rightarrow b(x)] \Rightarrow [(\forall x) a(x) \Rightarrow (\forall x) b(x)]$
 $(\exists x) \neg b(x)$ (neplatí to b)
 $(\exists x) a(x) \wedge \neg b(x)$
 $(\forall x) a(x) \Leftrightarrow 1$
 $[(\forall x) a(x) \Leftrightarrow 0]$
 $(\exists x) \neg b(x)$
 spor neplatí
 ↓
 je tautologie
 toto můžeme znegovat
 $(\forall x) a(x) \wedge (\exists x) \neg b(x)$
 $1 \quad 0 \Rightarrow b(x) \Leftrightarrow 0$

d) $\log_2 3 \notin \mathbb{Q}$

supon: $\log_2 3 \in \mathbb{Q}$ $a, b \in \mathbb{Z}$ $b \neq 0$

$$\log_2 \frac{3}{2} = \frac{a}{b}$$

$$2^{\frac{a}{b}} = 3 \quad | \cdot b$$

$$2^{\frac{a}{b} \cdot b} = 3^b$$

$$2^a = 3^b$$

$$\Downarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{3^3}) (2+2^0)$$

$$(\sqrt[3]{2^3}) (1+1)$$

diviz
a=0

e) $(\forall n \in \mathbb{N}) (5|n^2+1 \Rightarrow 10|n) \rightarrow \text{PLAN}$

$$10|n \Rightarrow 5|n^2+1 \quad \checkmark$$

$n = 10k$

$$5 + 10k^2 + 1$$

$$5 + 100k^2 + 1 \quad \checkmark$$

9) $a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow ab \in \mathbb{Q}$

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{u}{v} = \frac{xu}{yv} \in \mathbb{Q} \quad \checkmark$$

$x, y, u, v \in \mathbb{Z}$
 $y, v \neq 0$

! $x, u \in \mathbb{Z}$
 $y, v \in \mathbb{Z}$

D. 6

6) p je prvočíslo $\Rightarrow \sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$

prvočíslo je nekonečné vetár

$a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow ab \in \mathbb{Q}$

14. 10. 2021

1) $(\forall n \in \mathbb{N}) (2^n < n! \Rightarrow 2^{n+1} < (n+1)!)$

$2^n < n! \Rightarrow 2^n \cdot 2 < (n+1)n!$

$2 \cdot 2^n < (n+1)2^n$

$2 < n+1$

$1 < n$

$n > 1$

mat. indukcia

$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 < 2n! \leq (n+1)n! = (n+1)!$ ako

$(n+1)n! = \underbrace{n! + n! + \dots + n!}_{n+1 \text{ krát}}$

$n! + n! \geq 2n!$

MATEMATICKÁ INDUKCIA

2. $(\forall n \in \mathbb{N}) : 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

1) $n=0$

$$0 \cdot 1 = \frac{0 \cdot 1 \cdot 2}{3}$$

$$0 = 0 \quad \checkmark$$

2) $n: 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) \Rightarrow \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

$n+1: 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1) + (n+1)(n+2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$

$\frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3} \quad | \cdot 3$

$n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2) = (n+1)(n+2)(n+3)$

$n^3 + 3n^2 + 2n + 3n^2 + 6n + 6 = (n^3 + 3n^2 + 6n + 6)$

$n^3 + 6n^2 + 8n + 6 = n^3 + 6n^2 + 8n + 6 \quad \checkmark$

3) Nájdite $\forall n \in \mathbb{N} : a) 2^n \geq n-2$

1. $n=1$ $2^1 \geq 1-2$?

$2 \geq -1 \quad \checkmark$

2. $n=2$ $2^2 \geq 2-2$

$n: 2^{n+1} \geq n-1$

báda
uvidíš
výf
3

$n=3$

$2^3 \geq 3-2$

$8 \geq 1 \quad \checkmark$

ostatné mám dle
oktovať

$n=0$ $2^0 \geq 0-2$

$n=1$ $1 \geq -2 \quad \checkmark$

$n=2$ $2^2 \geq 2-2$

$4 \geq 0 \quad \checkmark$

stat.
dok.: $\frac{2^{n+1}}{2^n} \geq \frac{n-1}{n-2}$

$2^{n+1}(n-2) \geq 2^n(n-1)$

$2^{\cancel{n}} \cdot 2(n-2) \geq 2^{\cancel{n}}(n-1)$

$2(n-2) \geq (n-1)$

$2n-4 \geq n-1 \Rightarrow n \geq 3$

b) $(\forall n \in \mathbb{N}): n^2 \leq 2^n$

$n=1$

$1^2 \leq 2^1$

$1 \leq 2 \checkmark$

$n=2$ IP: $2^2 \leq 2^4$

$n=1$: $(n+1)^2 \leq 2^{n+1}$ $(n+1)^2 \leq 2^{n+2}$

Šteti uk.: $\frac{(n+1)^2}{n^2} \leq \frac{2^{n+1}}{2^n} \rightarrow$ treba poredati prvo

$(n+1)^2 \leq 2^{n+1} \cdot 2$

$n^2 + 2n + 1 \leq 2^{n+1} \cdot 2$

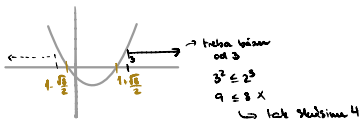
$n^2 + 2n + 1 \leq n^2 \cdot 2$

$2n + 1 \leq n^2$

$-n^2 + 2n + 1 \leq 0$

$n^2 - 2n - 1 \geq 0$

$\frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = x = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$



→ treba videti
od 3

$3^2 \leq 2^3$

$9 \leq 8 \times$

↳ tako veljima 4

$4^2 \leq 2^4$

$16 \leq 16 \checkmark$

ale treba aj 2

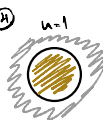
$2^2 \leq 2^2 \checkmark$

aj pre 0

$0^2 \leq 2^0$

$0 \leq 1 \times$

4)



tako wie je
susedstva
(2 x 1 kosa)



- invertirajmo farby

5)

$w_1, w_2, \dots, w_n$ (mince)

lambertove drobine

al jedna droba, velky

$\perp$ $\perp$ $\perp$ $\perp$ $\perp$ $\perp$

od nej datava musim

$\perp$ $\perp$ $\perp$ $\perp$ $\perp$ $\perp$

drobit

$\vdots$

$\perp$ $\perp$ $\perp$ $\perp$ $\perp$ $\perp$?

1 minca: $\perp$ - wie

$\perp$ - droba

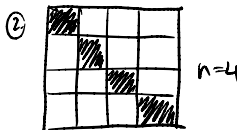
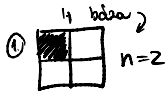
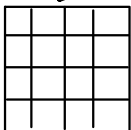
- M vsem spravne drobit u mince

$\rightarrow$ vsem aj pre $n+1$

$\perp$ $\perp$ $\perp$ $\perp$ $\perp$ $\perp$
 $\underbrace{\quad\quad\quad}_n \quad \underbrace{\quad}_+1$

21.10.2021

2^n



$n \geq 1$

1) Dk. $2^k \cdot 2^k \rightarrow 2^{k+1} \cdot 2^{k+1}$



toto vsem
sakarbit: podlav podpodlavu

$\rightarrow$ ked to spravim m, j to stale validne!

MNOŽINY

1) $A = \{a, b, \{c\}, \emptyset\}$

a) $|A| = 4$ (musia byť rozdielne)

b) rozhodnite či platia výroky:

$A \in A$ - neplatí

$A \subseteq A$ - platí

$\emptyset \in A$ - platí (toto všeobecne platí nemusi)

$\emptyset \subseteq A$ - platí ($\emptyset$ je podmnožina všetkých)

$\{a, b\} \in A$ - neplatí

$\{a, b\} \subseteq A$ - platí

2) $(\forall x) x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \cap B$

$(\forall x) x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B$



vennove diagramy nie su dôležité

$(\forall x) x \in A \cup (B \cap C) \stackrel{!}{=} (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$(\forall x) x \in A \vee x \in (B \cap C)$

$(\forall x) x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)$

$(\forall x) (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)$

$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

3) $P(A)$ - potenčná množina

= množina všetkých podmnožín

$= \{M \mid M \subseteq X\}$

from iterateds import combinations

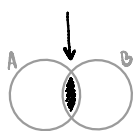
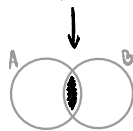
$P(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

$P(\{c, d, \{e\}\}) = \{\emptyset, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}, \{c, d, e\}\}$

4) $P(A) \cap P(B) \stackrel{?}{=} P(A \cap B)$

$x \in P(A) \wedge x \in P(B) \stackrel{?}{=} x \in P(A \cap B)$

$x \subseteq A \wedge x \subseteq B$



'pravdepodobne'
sa to rovná

$\Rightarrow$ podm. dokazovať

$(\forall x) x \in P(A) \cap P(B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\forall x) x \in P(A) \wedge x \in P(B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\forall x) x \subseteq A \wedge x \subseteq B \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\forall x) x \subseteq A \cap B \Leftrightarrow x \subseteq P(A \cap B)$

$x \subseteq A \Leftrightarrow (\forall y \in x) y \in A$

$x \subseteq B \Leftrightarrow (\forall y \in x) y \in B$

$P(A) \cup P(B) \stackrel{?}{=} P(A \cup B)$

$(\forall x) x \in P(A) \vee x \in P(B)$

$(\forall x) x \in P(A \cup B)$

$x \subseteq A \vee x \subseteq B$

$x \subseteq A$



$(\forall x) x \in P(A) \cup P(B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\forall x) x \in P(A) \vee x \in P(B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\forall x) x \subseteq A \vee x \subseteq B \Rightarrow$

$\Rightarrow (\forall x) x \subseteq A \cup B \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\forall x) x \in P(A \cup B)$

$|A \cup B| \leq |A| + |B|$

* ak by bol prvok v každej

z množín, tak v jednotku

musí len raz

$|P(A)| = 2^{|A|}$

$2^{|A|} + 2^{|B|} = 2^{|A \cup B|}$

5) (i) $A \subseteq B$

(ii) $A \cup B = B$

(iii) $A \setminus B = B \setminus A$ (akoby xori) $\rightarrow$ SYMETRICKÁ
DIFFERENCIA



(i) $\rightarrow$ takto sa to dokazuje

alebo takto (i) $\rightarrow$ (ii)
(ii) $\rightarrow$ (i)

(i) $\Rightarrow$ (ii)

$A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$



INTUITIVNE
TO PLATÍ,
EŠIE DOKAZAŤ

$A \subseteq B$ $\rightarrow$ všetko z množiny A
je v množine B

$(\forall x) x \in A \cup B \dots (\forall x) x \in B$

$(\forall x) x \in A \vee x \in B$ $\rightarrow$ rozpisovať podľa
definície, čo tým
sa rozumie

$(\forall x) x \in B \vee x \in B$ $\rightarrow$ momentálne
s. nie sme
rovní, či je to
ekvivalentné

$(\forall x) x \in B$ $\rightarrow$ potvrdiť
potom uplatniť
predpoklad

$(\forall x) x \in B$ $\rightarrow$ keďže si nie sme
rovní, množina
dokazuje aj druhú
stranu

$\rightarrow$ $A \subseteq B$

$\# A = B$

$A \subseteq B$

$A \subseteq B$

$A \subseteq B$

$A \subseteq B$

$A \subseteq B$

$A \subseteq B$

$A \subseteq B$

$A \subseteq B$

$A \subseteq B$

$A \subseteq B$

$A \subseteq B$

$A \subseteq B$

$A \subseteq B$

$A \subseteq B$

$A \subseteq B$

$A \subseteq B$

$A \subseteq B$

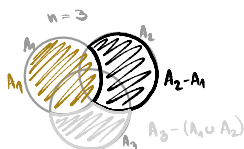
$A \subseteq B$

$A \subseteq B$

⑥ $n \geq 2$

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n =$$

$$= (A_1 \cup (A_2 - A_1)) \cup (A_2 - (A_1 \cup A_2)) \cup (A_3 - (A_1 \cup A_2 \cup A_2)) \dots (A_n - (A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}))$$



vždy podávám len to,
čo je tam navrch

1, $n \geq 2$

$$A_1 \cup A_2 = A_1 \cup (A_2 - A_1)$$

$$(\forall x) x \in A_1 \cup (A_2 - A_1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\forall x) x \in A_1 \vee x \in (A_2 - A_1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\forall x) x \in A_1 \vee (x \in A_2 \wedge x \notin A_1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\forall x) (x \in A_1 \vee x \in A_2) \wedge \underbrace{(x \in A_1 \vee x \notin A_1)}_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\forall x) (x \in A_1 \vee x \in A_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\forall x) x \in A_1 \cup A_2$$

□

lepšie začať so
zložitejším výrazom
dokazovať (lebo len
redukciou, vynyfšovaním)

← späť by to
bolo komplikovanejšie

$k \rightarrow k+1$

$$(A_1 \cup (A_2 - A_1)) \cup \dots \cup (A_k - (A_1 \cup \dots \cup A_{k-1})) \cup (A_{k+1} - (A_1 \cup \dots \cup A_k))$$

$$= \underbrace{A_1 \cup \dots \cup A_k}_{IP} \cup (A_{k+1} - (A_1 \cup \dots \cup A_k)) =$$

odčuno

$$\underbrace{X}_{A_1 \cup \dots \cup A_k} \cup \underbrace{(Y - X)}_{A_{k+1} - (A_1 \cup \dots \cup A_k)} = X \cup Y =$$

$$= A_1 \cup \dots \cup A_k \cup A_{k+1}$$

□